ECOLE SPECIALE DES TRAVAUX PUBLICS, DU BATIMENT ET DE L'INDUSTRIE

CONCOURS COMMUN D'ADMISSION AUX ÉCOLES SUPÉRIEURES

DES TRAVAUX PUBLICS
DU BATIMENT
DE MÉCANIQUE ÉLECTRICITÉ
DE TOPOGRAPHIE

SESSION 1987

DEUXIEME INTERROGATION DE MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures

NOTA : Les cinq sujets sont totalement indépendants et peuvent être traités dans un ordre quelconque, sous réserve d'indiquer très clairement leur numéro.

Dans la rédaction de leurs copies, les candidats sont priés de bien vouloir encadrer *chacun des résultats correspondants aux éléments* encadrés *dans les énoncés, et ceux-ci seulement.*

»»»»»»»»»»o«««««««««

SUJET No 1

On pose $$F(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1 + \cos x.\cos t}$$

(1) Quel est l'ensemble de définition $\boxed{(E)}$ de cette fonction F ?

(2) Calculer $\boxed{F(0)}$.

(3) Dans cette question on suppose $x \in]0, \pi[$. Calculer $\boxed{F(x)}$ au moyen du changement de variable $u = \operatorname{tg}(t/2)$.

(4) Dresser un tableau de variation de F dans l'intervalle $]-\pi, \pi[$, et dessiner la courbe représentative correspondante. Quel est, dans cet intervalle, le $\boxed{\text{signe}}$ de la dérivée seconde F'' ?

(5) Au moyen de la valeur de F trouvée en (3), ou autrement, calculer l'intégrale

$$G(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{(1 + \cos x.\cos t)^2}$$

On mettra le résultat sous la forme $G(x) = H(x).(\sin x)^{-3}$, où $\boxed{H(x)}$ est une fonction très simple que l'on précisera.

SUJET No 2

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \dfrac{1.3.....(2n-1)}{2.4.....2n}$ et $a_0 = 1$.

On rappelle que, pour tout $x \in]-1,1[$, on a $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

(1) Donner un développement en série entière, en abrégé DSE, de $f(x) = \operatorname{Arcsin} x$, soit $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{2n+1}$, où l'on mettra b_n sous la forme $b_n = a_n . b'_n$, la suite $\boxed{(b'_n)}$ étant à déterminer.

(2) Soit $g(x) = (\operatorname{Arcsin} x)^2$. Calculer l'expression $\boxed{G(x)} = (1-x^2)\,g''(x) - xg'(x)$.

(3) En déduire un DSE de g(x), soit $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^{2n}$, où l'on mettra c_n sous la forme $c = c'_n/a_n$, la suite $\boxed{(c'_n)}$ étant à déterminer.

(4) Soit $h(x) = (\operatorname{Arcsin} x)^3$. Calculer l'expression $\boxed{H(x)} = (1-x^2)\,h''(x) - xh'(x)$.

(5) Avec ce résultat, ou autrement, déterminer un DSE de h(x), soit $h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n x^{2n+1}$, où l'on mettra d_n sous la forme $d_n = 6b_n . s_n$, la suite $\boxed{(s_n)}$ étant à déterminer.

SUJET No 3

Pour tout réel $x > 0$, on pose $f(x) = x^{x^2}$ (c'est-à-dire, si l'on préfère, $x^{(x^2)}$) , avec, en outre, $f(0) = 1$.

(1) Calculer la dérivée $\boxed{f'}$ de f, et représenter graphiquement $y = f(x)$, $x \geq 0$.

(2) On pose $\varphi(x) = x^2 \ln x$, $\varphi(0) = 0$. Calculer $\boxed{M} = \sup_{x \in [0,1]} |\varphi(x)|$

(3) Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$, on a : $f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\varphi^n(x)}{n!}$

et justifier l'égalité

$$\int_0^1 f(x)dx = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_0^1 \varphi^n(x)dx.$$

T.S.V.P.

(4) Calculer l'intégrale $\boxed{I_n} = \int_0^1 \varphi^n(x)dx$.

(5) En déduire alors la valeur de l'intégrale $J = \int_0^1 f(x)dx$ sous forme d'une série convergente.

On fournira, grâce à cette représentation, la valeur numérique de $\boxed{J}$ avec 5 chiffres significatifs.

Nota : Il est rappelé que l'abréviation ln signifie : logarithme népérien.

SUJET No 4

(1) Etant donné un nombre complexe c, non nul, $c \in \mathbb{C}^*$, on appelle ρ son module et θ l'un de ses arguments. Déterminer l'ensemble (E) des nombres complexes z, tels que $e^z = c$.
On précisera la partie réelle $\boxed{x} = Re(z)$, et la partie imaginaire $\boxed{y} = Im(z)$.

(2) On considère l'équation (A) $\cos z + \sin z = -2$

En posant $Z = e^{iz}$, déterminer l'équation $\boxed{(B)}$, du second degré, dont Z est racine. On fera en sorte que, dans cette équation, le coefficient de Z^2 soit égal à 1.

(3) Déterminer, parmi les solutions de (A), un complexe $\boxed{z_0}$ dont le module est minimum, que l'on mettra sous la forme $z_0 = x_0 + iy_0$

(4) Soit (C) l'équation (C) $\cos^3 z + \sin^3 z = 1$, $z \in \mathbb{C}$.

Former l'équation $\boxed{(D)}$ du 3ème degré, dont $s = \cos z + \sin z$ est solution.

(5) En déduire l'ensemble $\boxed{(F)}$ des solutions de l'équation (C).

SUJET No 5

Etant donné trois nombres réels x, y, z, on considère la matrice symétrique

$$M = M(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & x & y \\ x & 0 & z \\ y & z & 0 \end{pmatrix},$$

à laquelle on associe le point m, de coordonnées (x,y,z), noté m(x,y,z), $m \in \mathbb{R}^3$, l'espace $\mathbb{R}^3$ étant muni de sa topologie habituelle.

On définit, dans ce qui suit, 5 parties de $\mathbb{R}^3$, soit E_1, E_2, E_3, E_4, E_5. Pour chacune d'elles, on demande de reconnaître et de justifier qu'elle est soit vide, soit égale à $\mathbb{R}^3$, soit ouverte non vide différente de $\mathbb{R}^3$, soit fermée non vide différente de $\mathbb{R}^3$, soit rien de tout cela.

(1) E_1 est l'ensemble des m(x,y,z) tels que M(x,y,z) ne soit pas inversible.

(2) E_2 est l'ensemble des m(x,y,z) tels que la forme quadratique associée à la matrice symétrique M(x,y,z) soit définie positive.

(3) E_3 est l'ensemble des m(x,y,z) tels que les trois valeurs propres de M(x,y,z) soient distinctes.

(4) E_4 est l'ensemble des m(x,y,z) tels qu'il existe un entier $n \geq 0$ (dépendant de x,y,z), pour lequel $(M(x,y,z))^n = 0$.

(5) E_5 est l'ensemble des m(x,y,z) tels que M(x,y,z) ait (au moins) une valeur propre rationnelle

(On rappelle que l'ensemble des rationnels est dénombrable).

Les résultats précédents seront récapitulés en mettant, pour chacune des 5 lignes du tableau suivant, une croix dans la case convenable :

	$\emptyset$	$\mathbb{R}^3$	ouvert $\neq \emptyset, \neq \mathbb{R}^3$	fermé $\neq \emptyset, \neq \mathbb{R}^3$	aucun des 4 cas précédents
E_1			X		
E_2	X				
E_3			X		
E_4				X	
E_5					X

»»»»»»»»»»o«««««««««««

ECOLES de TRAVAUX PUBLICS:E.S.T.P.
Deuxième interrogation
page 171
1987